

Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non-réciproques

K. EL KHOURY et A. NEVEU

Centre d'Energétique de l'Ecole des Mines de Paris, 60 Boulevard Saint Michel,
75272 Paris Cedex 06, France

(Reçu le 18 février 1988 et sous forme finale le 11 avril 1988)

Résumé—Le champ d'application de l'analyse modale d'une structure thermique est délimité par trois grandes hypothèses quant à la nature des transferts : linéarité, stationnarité et réciprocity. La dernière interdit en pratique l'emploi de la méthode lorsque des fluides sont en mouvement. Nous décrivons ici un procédé de résolution formelle qui lève cette restriction pour un opérateur de la chaleur très général (diffusion thermique, rayonnement, transport d'énergie par transfert de masse). Le calcul repose sur l'adaptation de la technique de séparation de variables au domaine complexe. La démarche met en évidence deux familles biorthogonales de modes propres associées à des spectres dénombrables de valeurs propres et constituant une base de solutions élémentaires. Deux exemples, une boucle de circulation d'un fluide et un bâtiment muni d'une ventilation mécanique contrôlée, illustrent l'utilisation du modèle modal général ainsi mis au point.

1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME général de l'écoulement de la chaleur dans une structure thermique en régime variable est complexe à plus d'un titre. D'une part, le champ thermique recherché est de nature spatiale et temporelle, ce qui induira un système d'équations aux dérivées partielles. D'autre part, dans ces structures sont mis en jeu, souvent avec une importance comparable et de manière couplée, trois mécanismes différents de transfert : la diffusion de la chaleur, le rayonnement thermique et le transport d'énergie par transfert de masse. Enfin, les structures peuvent comporter un grand nombre d'éléments entre lesquels existent de multiples connexions. Dans cet article, une structure thermique désignera un ensemble constitué de matériaux solides et de masses fluides échangeant exclusivement de l'énergie suivant les trois modes de transfert précités.

Jusqu'à l'apparition des calculateurs automatiques, les résolutions étaient limitées à des configurations simples et reposaient sur des transformations formelles et l'existence de solutions analytiques particulières. L'équation de diffusion de la chaleur par conduction à elle seule a fait l'objet de nombreux travaux. Différentes méthodes ont été proposées comme la transformation intégrale [1], les fonctions de Green [2], ou la transformation de Laplace [3]. Notons qu'elles utilisent toutes, plus ou moins directement, les résultats établis à l'aide de la technique de séparation des variables. Lorsque les trois modes de transfert sont présents simultanément les solutions analytiques sont plus rares. Aujourd'hui, pour traiter ce problème, les procédés purement numériques se sont généralisés. Ils reprennent la résolution à sa base en opérant une discrétisation des équations locales

de bilan thermique. C'est le cas notamment dans les méthodes des différences finies [4] et des éléments finis [5]. Cette approche dont la puissance est considérable, est souvent la seule praticable. Elle fournit par simulations une quantité d'information importante. L'analyse du comportement du système en fonction de ses caractéristiques thermophysiques est toutefois difficile. Il est en réalité courant de rencontrer des modèles matriciels comportant plusieurs milliers de coefficients.

Sans abandonner la précieuse ressource du calcul automatique il est intéressant de reprendre l'idée d'un traitement analytique formel préalable des équations. On peut s'attacher au principe de séparation des variables pour mettre en évidence des invariants fondamentaux de la structure thermique : les éléments propres. C'est ce qui est fait dans la méthode d'analyse modale [6]. Dans celle-ci, l'observation de la dominance des modes propres, à travers les coefficients de décomposition du champ de température par exemple, met en relief les traits caractéristiques de la structure étudiée sans recourir à la simulation [7].

Les qualités propres aux représentations modales des transferts couplés dans une structure ont été mises à profit pour la simulation des évolutions temporelles [8, 9] l'analyse de l'inertie thermique [10, 11], l'identification de processus énergétiques [12, 13]. Trois conditions imposées aux équations phénoménologiques de transferts délimitent le domaine d'application de l'analyse modale : linéarité, stationnarité, réciprocity.

Les deux premières sont classiques et de significations connues. Grâce à la linéarité et à la stationnarité (cette dernière correspond à l'invariance des caractéristiques thermophysiques dans le temps), il est possible d'utiliser le principe de superposition.

NOMENCLATURE

A	rapport d'amplitude	$T_g(M, t), T_d(M, t)$	champs de température en régimes glissant et dynamique, respectivement
a_i	défini dans l'équation (15)	$u(M)$	produit de la capacité calorifique volumique par le vecteur vitesse au point M
a_m, b_m	définis dans l'équation (31)	$U(M, t)$	champ de sollicitation
\mathcal{B}	opérateur des conditions aux limites	v	vitesse moyenne du fluide dans le conduit
$c(M)$	capacité calorifique volumique au point M	$V_i(M), V_m(x)$	fonctions propres de l'opérateur de la chaleur
\mathcal{D}	domaine limité de l'espace	$W_j(M), W_m(x)$	fonctions propres de l'opérateur adjoint de la chaleur
$\bar{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^0$	complémentaire dans l'espace et intérieur de \mathcal{D} , respectivement	$X_i(t)$	état élémentaire du système thermique, associé au mode propre d'ordre i
\mathcal{E}	l'espace \mathbb{R}^3	x_0, x_1, x_2	abscisses curvilignes sur la boucle
$f(M), g(M)$	fonctions de l'espace	Z_j, Z_m	valeurs propres complexes de l'opérateur de la chaleur
h	coefficient d'échange de chaleur, par unité de longueur du conduit, entre le fluide et l'extérieur	Z_j^*, Z_m^*	valeurs propres complexes de l'opérateur adjoint de la chaleur.
$K(M)$	tenseur des conductivités thermiques au point M	Lettres grecques	
k	conductivité thermique du fluide	α_i	coefficient défini dans l'équation (15)
L	longueur du tuyau	δ_{ij}	symbole de Kronecker
L	opérateur de la chaleur généralisé	$\delta_M(M)$	distribution de Dirac
L^*	opérateur adjoint de la chaleur	θ	température adimensionnée
M, M'	points du domaine \mathcal{D}	λ_i	partie réelle de la valeur propre complexe Z_i
$n(M)$	vecteur normal à une surface au point M	ρc	capacité calorifique volumique du fluide
P, P_0	densités volumiques de puissances de sollicitation	τ	temps caractéristique, constante de temps
$r(M, M')$	coefficient d'échange par rayonnement, linéarisé	ϕ, ϕ_m	angles de déphasage
S	section du tuyau	$\phi(M, t)$	champ de densité de flux
$S(M, M')$	fonction de Green définie dans l'équation (18)	ω_i, ω_m	parties imaginaires des valeurs propres complexes Z_i et Z_m ou pulsations propres d'ordre i et m , respectivement
$\mathcal{S}^*, \mathcal{S}^0, \mathcal{S}$	interface séparant \mathcal{D} de $\bar{\mathcal{D}}$, interface interne entre solides et fluides et l'union des deux, respectivement	Ω_0	pulsation de sollicitation.
t	temps		
T_0	température ambiante		
T_r	température de référence		
$T(M, t)$	champ de température		

La réciprocité est une hypothèse implicitement admise dans un bon nombre de cas (conduction notamment) bien qu'elle induise des symétries très utiles. Elle signifie que le sens du flux de chaleur au niveau élémentaire est lié uniquement au gradient de température. Autrement dit le gradient de température est le "moteur" de l'échange de la chaleur. Ceci exclut, en principe, les transferts dus à un transport direct de matière. Dans le cas de mouvements de fluides, la température des points situés dans un écoulement dépend des températures en amont sans que la réciproque soit vraie.

Cette dernière hypothèse limite singulièrement le domaine d'utilisation de l'analyse modale. De plus elle semble indispensable pour démontrer la propriété d'orthogonalité des éléments propres [14] qui fait la

richesse de la méthode. Notons cependant qu'une solution modale classique existe dans le cas très particulier du transfert de chaleur dans un conduit ouvert (problème unidirectionnel). Elle utilise un changement de variable qui ramène à un problème où l'hypothèse de réciprocité est vérifiée [15]. Malheureusement ce procédé de transformation n'est pas généralisable à des configurations géométriques plus élaborées. Toujours pour ce problème de conduit ouvert, mais cette fois avec des sollicitations périodiques, on trouve dans [16] une solution analytique qui fait intervenir des éléments propres d'un problème complexe. Toutefois les parties imaginaires sont artificielles car elles sont induites par la représentation complexe de l'excitation harmonique, et les éléments propres ainsi obtenus dépendent de la pulsation de celle-ci. La formule

donnée ne constitue donc pas une solution modale générale.

Cet article propose de lever les restrictions liées à l'hypothèse de réciprocité à l'aide d'une technique originale, issue de la séparation des variables, appliquée à un opérateur de la chaleur généralisé dans le domaine des nombres complexes. La solution trouvée fait intervenir des éléments propres intrinsèques du système, et donc indépendants des sollicitations en particulier. Ceci donne un caractère très général à la solution analytique formelle. Notre propos vise essentiellement à décrire la méthode, les applications très simples n'étant présentes que pour en illustrer le bien fondé.

2. OPERATEUR DE LA CHALEUR POUR LES TRANSFERTS COUPLES

Dans cette section nous rappelons les équations du transfert couplé d'énergie, par diffusion thermique, rayonnement et transport de masse fluide, dans les conditions de linéarité et de stationnarité. Pour chaque mode de transfert nous identifierons les propriétés de réciprocité.

2.1. Notations et conventions

La structure thermique \mathcal{D} formée de solides et de fluides est entourée par son environnement $\bar{\mathcal{D}}$, l'union de \mathcal{D} et $\bar{\mathcal{D}}$ formant l'espace tout entier \mathcal{E} . L'ensemble des points intérieurs à \mathcal{D} est noté \mathcal{D}^0 . Nous désignerons, par \mathcal{S}^* , \mathcal{S}^0 et \mathcal{S} l'interface séparant \mathcal{D} et $\bar{\mathcal{D}}$, l'interface interne de \mathcal{D} entre les solides et les fluides, et l'union de \mathcal{S}^* et de \mathcal{S}^0 , respectivement.

Nous indiquerons la variable d'espace par la notation générique M . L'élément différentiel dM désignera indifféremment un volume ou une surface infinitésimale associée au point M . La normale au point M d'une surface sera notée $\mathbf{n}(M)$. Lorsqu'il s'agit d'une frontière de domaine, elle sera orientée vers l'extérieur de celui-ci, et entre deux milieux i et j , du premier vers le deuxième.

2.2. Operateur de la chaleur

L'équation qui gouverne l'évolution du champ de température du système traduit la conservation de l'énergie et s'écrit symboliquement :

$$\left(\begin{array}{c} \text{flux} \\ \text{de} \\ \text{conduction} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{flux} \\ \text{de} \\ \text{rayonnement} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{flux} \\ \text{de} \\ \text{transport} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{flux} \\ \text{externe} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{variation} \\ \text{d'énergie} \\ \text{interne} \end{array} \right).$$

De cette égalité on déduit l'équation ponctuelle de l'énergie, pour un point intérieur à la structure thermique :

$$\forall M \in \mathcal{D}^0$$

$$\nabla[K(M)\nabla T(M, t)] + \int_{\mathcal{D}} r(M, M')T(M', t) dM'$$

$$- \mathbf{u}(M) \cdot \nabla T(M, t) + U(M, t) = c(M) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t}. \quad (1)$$

(1) $T(M, t)$ désigne le champ spatio-temporel de la température.

(2) Les matériaux sont homogènes mais peuvent présenter une anisotropie. $K(M)$ désigne le tenseur des conductivités thermiques. D'après les relations d'Onsager, il est symétrique et défini positif [17].

(3) $r(M, M')$ est la distribution de densité de coefficient d'échange radiatif [18]. Un exemple de son calcul est donné en annexe A pour des solides gris à émission diffuse et réflexion isotrope en présence de fluides inactifs sur le rayonnement. Les transferts radiatifs sont linéarisés [19].

(4) Les fluides sont newtoniens, incompressibles et peu visqueux. Les équations mécaniques et thermiques sont donc découplées et nous supposons le champ des vitesses connu et stationnaire [20]. Le produit de la capacité calorifique volumique par le vecteur vitesse sera désigné par $\mathbf{u}(M)$. Le bilan (1) est valable pour tous les points du domaine, en considérant que la vitesse est nulle dans les solides. Des fluides différents ne se mélangent pas.

(5) $U(M, t)$ est le champ des sollicitations. Il est engendré par l'existence de dégagements internes de chaleur et par les échanges thermiques avec l'environnement.

(6) $c(M)$ est la capacité calorifique volumique.

L'équation (1) est complétée par les conditions aux limites :

(a) pour un point M de \mathcal{S}^0 séparant deux milieux i, j solides ou fluides ($M \in \mathcal{D}^0$)

$$[K_j(M)\nabla T_j(M, t) - K_i(M)\nabla T_i(M, t)] \cdot \mathbf{n}_{ij}(M) + \int_{\mathcal{D}} r(M, M')T(M', t) dM' + U(M, t) = 0; \quad (2)$$

(b) pour un point M de \mathcal{S}^* séparant \mathcal{D} de $\bar{\mathcal{D}}$

$$-K(M)\nabla T(M, t) \cdot \mathbf{n}(M) + \int_{\mathcal{D}} r(M, M')T(M', t) dM' + U(M, t) = 0. \quad (3)$$

Les équations précédentes déterminent totalement le comportement de la structure thermique. Nous les écrirons sous une forme plus compacte :

$$\left. \begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{D}^0 \quad L[T(M, t)] + U(M, t) = c(M) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \\ \forall M \in \mathcal{S} \quad \mathcal{D}[T(M, t)] + U(M, t) = 0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

L est l'opérateur de la chaleur pour les transferts thermiques couplés, associé à l'opérateur des conditions limites \mathcal{D} . Il est linéaire et stationnaire. Exam-

inons plus en détails les propriétés de réciprocity des différents modes de transferts.

2.3. Réciprocity des transferts

Les lois élémentaires de transfert thermique qui ont été utilisées pour établir les équations (4) relient le flux de chaleur au champ de température. On dit qu'un transfert est réciproque si le changement de sens du gradient de température entraîne l'inversion du signe du flux absorbé.

D'après cette définition, et avec nos hypothèses, les échanges par conduction gouvernés par la loi de Fourier sont réciproques :

$$\phi(M, t) = -K(M) \nabla T(M, t) \cdot \mathbf{n}(M) dM. \quad (5)$$

La relation de réciprocity des facteurs de forme induit l'égalité :

$$r(M, M') = r(M', M). \quad (6)$$

En conséquence le flux élémentaire échangé par rayonnement entre deux volumes dM et dM' est réciproque puisqu'il est proportionnel à l'écart des températures en M et M' (qui joue ici le rôle du gradient) :

$$\phi(M, t, M') = r(M, M') [T(M', t) - T(M, t)] dM' dM. \quad (7)$$

Le transport de chaleur par transfert de fluide est gouverné par la relation élémentaire :

$$\phi(M, t) = -T(M, t) \mathbf{u}(M) \cdot \mathbf{n}(M) dM. \quad (8)$$

Cette fois le signe du flux d'énergie est donné non plus par le gradient, comme dans les deux cas précédents, mais par le sens du vecteur vitesse du fluide. D'après l'hypothèse de linéarité, l'écoulement est indépendant du champ de la température. Ici le "moteur" du transfert de chaleur n'est autre que le ventilateur ou la pompe qui met en mouvement le fluide. Nous sommes en présence d'un transfert non-réciproque.

Nous allons voir que ces propriétés de réciprocity conditionnent dans une large mesure les méthodes de résolution du problème d'évolution du champ de température d'un système thermique.

3. DECOMPOSITION MODALE DU CHAMP DE TEMPERATURE

Nous avons scindé la démarche de résolution analytique de (4) en deux parties :

(1) Une étude des propriétés remarquables de l'opérateur de la chaleur, qui aboutira à la mise au jour d'une famille de solutions particulières pour le problème homogène (base propre).

(2) Une transformation intégrale sur l'espace qui, en utilisant cette base, fournira une solution formelle du problème non homogène.

3.1. Base modale de l'opérateur de la chaleur

3.1.1. *Opérateur adjoint de la chaleur.* Formons le produit scalaire de deux champs continus de l'espace $f(M)$ et $g(M)$ définis dans \mathcal{D} :

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{\mathcal{D}} f(M) \bar{g}(M) dM \quad (9)$$

où \bar{g} désigne la conjuguée complexe de g .

Son existence nous permet de définir l'opérateur adjoint de L noté L^* . Si f et g satisfont les conditions limites des problèmes homogène et homogène adjoint respectivement, alors on a par définition :

$$\langle L(f), g \rangle \triangleq \langle f, L^*(g) \rangle. \quad (10)$$

Pour l'opérateur de la chaleur, L^* est tel que (Annexe B) :

$$\forall M \in \mathcal{D}^0$$

$$L^*[T(M, t)] = \nabla[K(M) \nabla T(M, t)]$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} r(M, M') T(M', t) dM' + \mathbf{u}(M) \cdot \nabla T(M, t) \quad (11)$$

et le problème d'évolution adjoint est obtenu en remplaçant simplement dans (4) L par L^* , les conditions limites restant inchangées. L'opérateur adjoint a un sens physique précis. Il correspond au même système thermique mais où le champ de vitesse est de sens opposé.

3.1.2. *Propriétés de l'opérateur de la chaleur "non réciproque".* D'un point de vue mathématique, l'opérateur de la chaleur généralisé L est égal à la somme d'un opérateur aux dérivées partielles elliptique du second ordre, et un opérateur intégral (terme de rayonnement). Dans le cas le plus général, l'opérateur \mathcal{B} associé à L est de type mixte, c'est-à-dire qu'il comprend des conditions aux limites de toutes les espèces.

Les références [21–23] donnent d'importants résultats concernant les opérateurs linéaires aux dérivées partielles elliptiques du second ordre, à coefficients complexes. Ceux-ci agissent sur des fonctions analytiques, définies sur un espace borné de dimension finie. On montre que ces opérateurs, associés à des conditions aux limites de première, de deuxième, de troisième espèce ou mixtes, possèdent des spectres discrets de valeurs propres. Les fonctions propres généralisées qui leurs sont associées forment une base pour les fonctions appartenant au domaine de définition de l'opérateur (par lequel nous désignons l'ensemble des fonctions vérifiant les conditions aux limites qui lui sont associées). La perturbation d'un tel opérateur par un opérateur borné quelconque ne modifie pas ses propriétés spectrales [24], en particulier celles qui viennent d'être citées.

Nous savons par ailleurs [25] qu'un opérateur linéaire et son adjoint possèdent des spectres "conjugués" de valeurs propres, et que deux fonctions propres associées à des valeurs qui ne sont pas conjuguées complexes sont orthogonales.

Ecrivons alors les problèmes aux valeurs propres pour les opérateurs L et L^*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathcal{D}^0$$

$$\left. \begin{aligned} L[V_i(M)] &= Z_i c(M) V_i(M) \\ L^*[W_i(M)] &= Z_i^* c(M) W_i(M) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

et sur \mathcal{S} , V_i et W_j vérifient les conditions aux limites homogènes ($U(M, t) = 0, \forall M \in \mathcal{S}, \forall t$) associées à L et L^* .

On vérifie que la partie différentielle de ce problème satisfait aux conditions de [21–23]. D'autre part, l'opérateur intégral correspondant aux transferts radiatifs est compact et borné [26].

L'opérateur de la chaleur pour des transferts couplés possède donc une famille dénombrable de fonctions propres $V_i(M)$, orthogonale à celle de son adjoint, $W_j(M)$. Cette famille forme une base pour les fonctions $f(M)$ qui satisfont aux conditions aux limites homogènes associées à L . Les deux opérateurs possèdent des spectres conjugués de valeurs propres Z_i et Z_j^* , $i, j \in \mathbb{N}$. Celles-ci sont généralement complexes et, comme L est à coefficients réels, leurs conjuguées sont elles mêmes valeurs propres.

Après avoir normé les fonctions propres la condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}$$

$$\langle V_i(M), c(M) W_j(M) \rangle = \delta_{ij}. \quad (13)$$

C'est grâce à l'existence de cette propriété remarquable d'orthogonalité des modes propres avec leurs adjoints qu'il nous sera possible d'étendre la méthode de décomposition modale aux systèmes à transferts couplés non réciproques. Avant de poursuivre il est utile d'examiner le problème homogène pour préciser le sens physique des éléments propres à valeurs complexes.

On vérifie immédiatement que pour la condition initiale particulière $T(M, 0) = V_i(M)$ le champ de température satisfait l'égalité :

$$T(M, t) = V_i(M) \exp(Z_i t). \quad (14)$$

La linéarité des équations nous autorise à superposer les modes propres pour reconstituer la solution du problème homogène associé à une condition initiale arbitraire $T(M, 0) = T_0(M)$. De la propriété d'orthogonalité nous déduisons les coefficients de décomposition sur la base des fonctions propres. Les éléments propres sont réels ou complexes et dans ce dernier cas nous les regrouperons par paires conjuguées. Nous obtenons en définitive l'expression réelle générale du champ de température :

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |\alpha_i V_i(M)| \exp(\lambda_i t) \times \cos(\omega_i t + \text{Arg } \alpha_i V_i(M)) \quad (15)$$

où

$$\alpha_i = \langle T_0(M), c(M) W_i(M) \rangle$$

$$Z_i = \lambda_i + j\omega_i, \quad j^2 = -1$$

$a_i = 1$ ou 2 selon qu'il s'agisse d'un mode réel pur ou complexe.

La partie réelle de la valeur propre Z_i correspond à l'inverse d'un temps caractéristique $\tau = -1/\lambda_i$, et sa partie imaginaire ω_i à une pulsation propre du système. Nous en déduisons que la réponse d'une structure thermique non réciproque peut présenter, en régime variable quelconque, des oscillations amorties. Cette interprétation peut paraître étonnante. L'équation de transfert de la chaleur ne présente qu'une dérivée première par rapport au temps et il ne peut pas exister par conséquent de résonance thermique (contrairement à ce qui se passe pour des systèmes mécaniques). Nous verrons sur l'exemple simple du paragraphe 4 que cette "contradiction" n'est qu'apparente.

Pour clore cette partie consacrée aux propriétés de l'opérateur de la chaleur, revenons un instant au cas des structures lieux d'échanges thermiques parfaitement réciproques ($u(M) = 0 \forall M$). On parle dans ce cas de problème auto-adjoint. Autrement dit les opérateurs L et L^* sont identiques. Ils admettent la même famille d'éléments propres ($V_i = W_i$) celle-ci étant à valeurs réelles. Les résultats établis dans le cadre de la théorie des systèmes non réciproques seront transposables en intégralité à des systèmes réciproques qui n'en constituent qu'un cas particulier.

3.1.3. Calcul pratique des éléments propres. Le calcul des éléments propres est un point important de la méthode puisqu'il permet de dépasser le stade purement formel de la résolution.

La voie analytique n'est praticable que dans des cas relativement simples. Un exemple est donné au paragraphe 4. On trouvera dans la référence [27] une méthode de calcul des éléments propres d'un bâtiment où les transferts sont supposés réciproques. Rien ne s'oppose d'ailleurs à sa transposition à des systèmes non réciproques. Notons que l'approche analytique aboutit toujours à rechercher les racines d'une équation transcendante, opération qui n'est réalisable que numériquement sur un ordinateur. La difficulté principale est alors de ne pas oublier de zéros. S'il existe des tests fiables au cours du calcul dans des cas réciproques [14, 28], le problème reste ouvert pour les systèmes non réciproques. Dans tous les cas, la décomposition des régimes permanents de température sur la base propre, permet en évaluant le reste de décomposition, de chiffrer a posteriori l'erreur commise par un oubli de valeurs propres.

Pour les grandes structures thermiques on préfère résoudre le problème aux valeurs propres (12) en le discrétisant par rapport à la variable d'espace par les méthodes classiques de différences finies ou d'éléments finis. L'opérateur intégro-différentiel de la chaleur est approximé par une matrice à coefficients réels non symétrique. La recherche des éléments propres se

réduit à la diagonalisation de cette matrice et de sa transposée. Cette dernière est en effet l'équivalent discret de l'opérateur adjoint L^* . Pour diagonaliser nous conseillons l'emploi de l'algorithme "Q-R" en double précision [29]. Nous l'avons comparé à une méthode itérative associée à des déflations successives [30] qui a l'avantage de déterminer les temps caractéristiques par ordre décroissant. A précision égale elle s'avère beaucoup moins rapide que la méthode "Q-R" même si on se contente des deux ou trois premiers éléments propres.

L'inconvénient majeur de cette approche numérique est lié à la discrétisation arbitraire de l'espace. Il n'existe en effet pas de critère de maillage optimal pour les systèmes complexes. En réalisant un découpage suffisamment fin, on est assuré que les premiers éléments propres déterminés par discrétisation convergent bien vers les éléments propres analytiques. La taille importante du modèle n'est pas gênante puisque le calcul des modes est une phase intermédiaire de l'obtention du modèle modal sur lequel on opérera une réduction où seuls quelques modes parmi les premiers seront conservés.

3.2. Transformation intégrale de l'opérateur de la chaleur

3.2.1. Régimes variable, dynamique et glissant.

Nous pouvons imaginer que le régime variable $T(M, t)$ solution de (4) résulte à chaque instant de la superposition d'un régime glissant $T_g(M, t)$ associé à un régime dynamique complémentaire $T_d(M, t)$:

$$T(M, t) = T_g(M, t) + T_d(M, t). \quad (16)$$

Quelles sont les expressions des régimes d'évolutions glissant et dynamique?

Le régime glissant est solution du problème stationnaire avec des conditions limites non homogènes. Le temps joue ici le rôle d'un paramètre

$$\left. \begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{D}^0 \quad L[T_g(M, t)] + U(M, t) = 0 \\ \forall M \in \mathcal{S} \quad \mathcal{B}[T_g(M, t)] + U(M, t) = 0. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Le champ de température glissant est équivalent au régime permanent qui serait atteint par le système si la sollicitation U conservait une valeur constante à partir de l'instant t . C'est aussi le régime que prendrait un système semblable mais dont la capacité calorifique serait nulle. Son expression est une forme intégrale:

$$T_g(M, t) = \int_{\mathcal{D}} S(M, M') U(M', t) dM'. \quad (18)$$

La fonction de Green $S(M, M')$ vérifie, pour tous les points M' de \mathcal{D} , l'équation (16) dans laquelle on substitue à la sollicitation $U(M, t)$ la distribution de Dirac $\delta M'(M)$ [31]. Dans le cas particulier où les conditions aux limites sur \mathcal{S}^* sont de deuxième ou troisième espèces $S(M, M')$ est décomposable sur l'espace des fonctions propres. C'est un moyen de la calculer.

De (4) et (17) nous déduisons que le régime dynamique satisfait une équation d'évolution avec des conditions limites homogènes. Ce régime sera décomposé sur la base des fonctions propres. Nous écrirons:

$$\left. \begin{array}{l} \forall M \in \mathcal{D}^0 \quad L[T_d(M, t)] - c(M) \frac{\partial T_g(M, t)}{\partial t} \\ \quad \quad \quad = c(M) \frac{\partial T_d(M, t)}{\partial t} \\ \forall M \in \mathcal{S} \quad \mathcal{B}[T_d(M, t)] = 0. \end{array} \right\} \quad (19)$$

La séparation du régime variable en deux régimes dynamique et glissant a des implications pratiques importantes. Elle élimine le problème de reste non décomposable du champ thermique lors de sa projection sur la base propre, celui-ci étant contenu dans le régime glissant. Lors de la réduction modale les modèles ne présenteront pas de biais statiques.

3.2.2. Transformation intégrale et équation d'état modale. Nous définissons l'état élémentaire $X_i(t)$ du système associé au mode propre d'ordre i par la transformation intégrale, sur le domaine \mathcal{D} , du champ de température en régime dynamique:

$$\forall i \in \mathbb{N}$$

$$X_i(t) = \langle T_d(M, t), c(M) W_i(M) \rangle. \quad (20)$$

Chaque état élémentaire vérifie une équation différentielle du premier ordre par rapport au temps [32]. C'est l'équation canonique ou l'équation d'état modale:

$$\begin{aligned} \frac{dX_i(t)}{dt} = & Z_i X_i(t) + \int_{\mathcal{D}} \langle W_i(M), -c(M) S(M, M') \rangle \\ & \times \frac{\partial U(M', t)}{\partial t} dM'. \end{aligned} \quad (21)$$

Le champ de température en régime dynamique se projette de manière unique sur la famille des fonctions propres $V_i(M)$ et il y a identité entre les coefficients de la décomposition et les états élémentaires. Ce résultat découle directement de la propriété d'orthogonalité.

Nous pouvons à présent écrire l'expression exacte du champ de température qui vérifie l'équation des transferts thermiques du système étudié (4):

$$\begin{aligned} T(M, t) = & \int_{\mathcal{D}} S(M, M') U(M', t) dM' \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t) V_i(M). \end{aligned} \quad (22)$$

Cette équation achève la généralisation de la décomposition modale du champ de température d'une structure thermique soumise à des transferts de chaleur couplés, linéaires, stationnaires et non-réciproques.

3.3. Quelques caractéristiques de la solution modale formelle

La solution formelle présente des propriétés intéressantes :

(1) Les équations canoniques et les états élémentaires sont indépendants entre eux.

(2) La partie dynamique de la solution est obtenue sous forme d'une série infinie mais dénombrable. Chaque terme est associé à une valeur propre complexe dont les parties réelle et imaginaire s'interprètent respectivement comme l'inverse d'une constante de temps et une pulsation caractéristique.

(3) L'intégration des équations d'état modales est immédiate et fournit une formule de simulation explicite adaptée à l'utilisation sur ordinateur. Notons que les sollicitations sont souvent données sous une forme échantillonnée dans le temps. L'intégration du terme correspondant de (21) ne peut être qu'approchée dans ce cas.

(4) La contribution de chaque mode est pondérée par une fonction exponentielle qui décroît d'autant plus vite que le temps caractéristique associé est petit. C'est donc tout naturellement qu'apparaît l'idée de modèle réduit construit en ne conservant dans (21) que la contribution des modes dominants. Le passage dans la base modale établit en quelque sorte une hiérarchie qui n'existe pas dans la base naturelle. La dominance peut être mise en évidence lors de l'observation des spectres des réponses indicelles à des sollicitations.

En présence d'un mode d'échange cause d'une non-réciprocité, nous venons de démontrer qu'il existe bien une solution analytique formelle du problème des transferts thermiques couplés. Ce résultat issu de la séparation des variables a nécessité le passage dans l'espace complexe \mathbb{C} ainsi que l'utilisation de l'opérateur adjoint de la chaleur dont l'interprétation physique est simple (champ de vitesse inversé). Les propriétés essentielles déjà établies dans le cas d'un système à transferts réciproques (opérateur auto-adjoint) ont été transposées. C'est le cas notamment de l'orthogonalité des fonctions propres. Les deux exemples qui suivent sont des illustrations simples mais significatives de la méthode d'analyse modale de systèmes comprenant des transferts de chaleur par transport de fluide. Dans chaque cas nous indiquerons les possibilités de réduction du modèle.

4. EXEMPLES D'APPLICATION

4.1. Boucle fluide

4.1.1. *Modélisation.* Nous étudions le comportement thermique d'un fluide incompressible circulant en boucle fermée dans un tuyau de section constante, et pouvant échanger de la chaleur avec l'extérieur où la température est supposée constante.

L'équation qui régit le comportement thermique du fluide en tout point de l'abscisse curviligne x s'écrit dans ce cas :

$$kS \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho c S v \frac{\partial T}{\partial x} - hT + hT_0 + SP = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

où k est la conductivité thermique du fluide, ρc sa capacité calorifique, v sa vitesse moyenne, h le coefficient d'échange, par unité de longueur du tuyau, entre le fluide et l'extérieur, T_0 la température extérieure, S la section du tuyau, et P la puissance volumique de sollicitation.

La circulation en boucle fermée impose à la température la condition de compatibilité :

$$T(x + L, t) = T(x, t). \quad (24)$$

L étant la longueur du tuyau.

Ce modèle monodimensionnel peut représenter assez précisément le comportement thermique réel du fluide lorsque le régime d'écoulement de celui-ci est turbulent.

Dans la suite, nous considérons une boucle où de l'eau circule dans un tuyau de section circulaire constante. Une puissance de sollicitation est appliquée sur une tranche de la boucle entre les abscisses curvilignes x_1 et x_2 . La grandeur observée est la température du fluide au point d'abscisse x_0 .

Les données numériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ m}, & v &= 0.1 \text{ m s}^{-1} \\ S &= 7.068 \times 10^{-4} \text{ m}^2, & h &= 2.12 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ k &= 0.647 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, & x_0 &= 5 \text{ m} \\ \rho &= 988 \text{ kg m}^{-3}, & x_1 &= 0 \\ c &= 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, & x_2 &= 0.25 \text{ m}. \end{aligned}$$

4.1.2. *Détermination des éléments propres.* La résolution analytique du problème aux valeurs propres qui découle de (23) et (24) conduit aux expressions suivantes des éléments propres, après normalisation :

$$Z_m = -\frac{h}{\rho c S} - m^2 \frac{4k\pi^2}{\rho c L^2} - jm 2\pi \frac{v}{L} \quad (25)$$

$$Z_m^* = -\frac{h}{\rho c S} - m^2 \frac{4k\pi^2}{\rho c L^2} + jm 2\pi \frac{v}{L} \quad (26)$$

$$V_m(x) = \frac{1}{\sqrt{(\rho c SL)}} \exp \left[j 2m\pi \frac{x}{L} \right] \quad (27)$$

$$W_m(x) = V_m(x) \quad (28)$$

où m est un entier relatif ($m \in \mathbb{Z}$).

Interprétons les termes des expressions des valeurs propres complexes.

D'après l'expression (25), la première constante de temps du système (pour $m = 0$) est :

$$\tau = \frac{\rho c S}{h}. \quad (29)$$

Ce temps est donc égal au rapport de la capacité calorifique du fluide à son coefficient d'échange avec l'extérieur, ou, en d'autres termes, "énergie accumulée" sur "puissance perdue". Il est d'autant plus grand que le système est bien isolé et sa capacité thermique élevée. Nous retrouvons ainsi un résultat bien connu pour les modes réels et qualifié parfois de

théorème “énergie sur flux” [33]. Son équivalent en mécanique vibratoire est le quotient de Rayleigh.

D’un autre côté, les pulsations propres du système s’écrivent :

$$\omega_m = m 2\pi \frac{v}{L}. \tag{30}$$

En remarquant que le rapport de la longueur du tuyau à la vitesse moyenne du fluide correspond au temps de transit de ce dernier dans la boucle (temps mis par une masse élémentaire pour effectuer un tour complet), nous déduisons, d’après (30), que les pulsations propres du système sont en réalité les harmoniques de la fréquence de transit de la boucle. Ceci montre qu’elles ont une interprétation physique, bien qu’elles soient dans les parties “imaginaires” des valeurs propres.

4.1.3. *Etude des évolutions temporelles.* Nous allons étudier le comportement thermique de la boucle, en fonction de deux types temporels de sollicitation : échelon et périodique. Dans les deux cas nous considérons que le fluide se trouve initialement à une température homogène égale à celle de l’ambiance. L’évolution de la température observée, T , sera représentée par une variable adimensionnelle de la forme :

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_r - T_0}$$

où T_0 est la température initiale et T_r une température de référence que nous définirons dans chacun des cas traités.

θ sera représentée par des expressions simplifiées où nous n’explicitons pas forcément tous les termes. Dans ces formules, “le mode d’ordre m ”, pour m différent de 0, signifie en réalité la paire de modes propres de cet ordre qui sont conjugués complexes et qui, pour la cohérence du modèle, doivent toujours être pris ensemble.

Les particularités des systèmes à transferts non réciproques vont être clairement mises en évidence grâce aux outils offerts par la méthode modale, aussi bien en analyse qu’en réduction.

(a) Sollicitation par une puissance échelon.

Une puissance constante P_0 est appliquée entre x_1 et x_2 à partir de l’instant initial $t = 0$. La température de référence est prise égale à celle observée dans le fluide au point x_0 en régime permanent.

A la manière de l’équation (15), et en utilisant les formules (21), (25)–(28), l’expression de l’évolution de la température adimensionnée θ au point x_0 peut être mise sous la forme :

$$\theta(t) = \Sigma[a_m - b_m \exp(\lambda_m t) \cos(\omega_m t + \phi_m)] \tag{31}$$

avec

$$\begin{aligned} a_m &= \text{Re}(\alpha_m) \\ b_m &= \|\alpha_m\| \\ \phi_m &= \text{Arg}(\alpha_m) \end{aligned}$$

Tableau 1. Tableau des réponses indicielles. Mode 0 au mode 10

	Constantes de temps (s)	Pulsations propres (rad s ⁻¹)	a_m (%)	b_m (%)
0	1377	0.0	99.935	99.935
1	1376	0.0628	0.154	2.307
2	1376	0.1257	-0.173	1.150
3	1375	0.1885	0.175	0.763
4	1374	0.2513	-0.174	0.568
5	1372	0.3142	0.171	0.450
6	1371	0.3770	-0.168	0.371
7	1369	0.4398	0.163	0.314
8	1367	0.5027	-0.158	0.270
9	1365	0.5655	0.153	0.236
10	1363	0.6283	-0.147	0.208

où α_m est une constante qui dépend du mode propre m , de la sollicitation et de l’abscisse x_0 de la mesure.

En régime permanent, nous avons :

$$\theta_p = \sum_{m=0}^{\infty} a_m = 1. \tag{32}$$

Nous remarquons alors que le terme a_m correspond rigoureusement à la contribution du mode d’ordre m au régime permanent. D’un autre côté, les termes b_m permettent de comparer l’importance relative des différents modes en régime transitoire. Nous allons donc mettre ces termes dans un tableau où figureront aussi les constantes de temps et les pulsations propres. L’examen de leurs valeurs respectives fait apparaître la contribution des modes, ce qui va nous permettre de réduire l’ordre du modèle en ne conservant que ceux qui sont prépondérants (Tableau 1).

On remarque la contribution presque exclusive du mode 0 au régime permanent dans cet exemple. Quant aux autres modes, ils ont très peu d’importance dans le régime transitoire. Un modèle n’utilisant que quelques éléments propres doit donc représenter correctement le comportement dynamique de la boucle. C’est ce que l’on constate sur la Fig. 1 où nous avons tracé l’évolution de la valeur de θ simulée à l’aide d’un modèle réduit au seul mode 0, que nous comparons à la solution analytique obtenue avec les 200 premiers modes. On note une très légère différence entre les

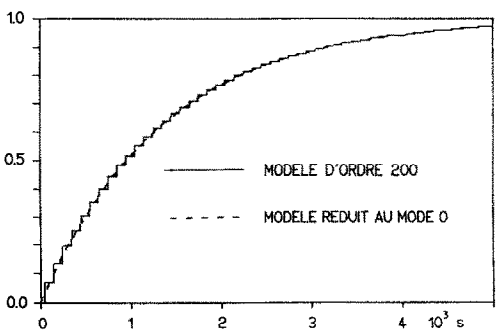
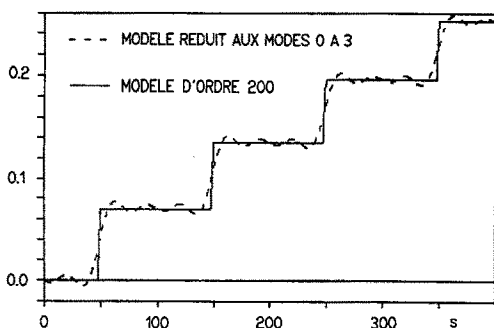


Fig. 1. Evolution de θ de 0 à 5000 s. Sollicitation échelon.

FIG. 2. Evolution de θ de 0 à 400 s. Sollicitation échelon.

résultats des deux modèles. En réalité, les paliers observés sur la courbe donnée par le modèle à 200 modes traduisent le fait que pendant presque la durée d'un tour du fluide dans la boucle, les masses élémentaires passant par le point d'abscisse x_0 auront eu exactement la même histoire, et seront par conséquent à la même température. Nous vérifions alors qu'en conservant dans le modèle, en plus du mode 0, les trois modes suivants, on arrive à reconstituer ces paliers avec une assez bonne précision (Fig. 2).

Le tableau des réponses se révèle être un outil privilégié pour évaluer l'importance relative des éléments propres et par là même pour guider la réduction du modèle. Ici il montre qu'un modèle d'ordre 1 représente bien les évolutions "lentes" de la boucle.

(b) Sollicitation par une puissance périodique.

A l'instant initial, $t = 0$, on applique entre les abscisses x_1 et x_2 une puissance périodique de la forme :

$$P(t) = P_0 \sin(\Omega_0 t).$$

Nous prenons comme température de référence, T_r , celle qui serait observée dans le fluide au point d'abscisse x_0 et en régime permanent, si la boucle était sollicitée par une puissance du type échelon, égale à P_0 . Nous trouvons alors une expression de l'évolution réduite de la température en régime établi au point x_0 de la forme :

$$\theta(t) = A \sin(\Omega_0 t - \phi) \quad (33)$$

où le rapport d'amplitude A et le déphasage ϕ dépendent de la pulsation de sollicitation Ω_0 , de l'abscisse x_0 de la mesure ainsi que de l'ensemble des modes propres du système.

Les variations de A et ϕ en fonction de la pulsation Ω_0 sont représentées sur la Fig. 3. La courbe (a) montre des pics du rapport d'amplitude A lorsque la pulsation Ω_0 est égale à une pulsation propre du système. Donnons tout d'abord une explication "intuitive" à

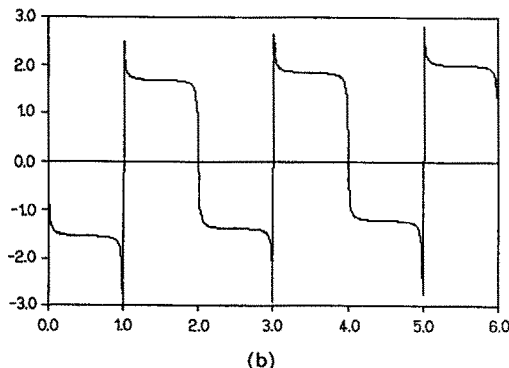
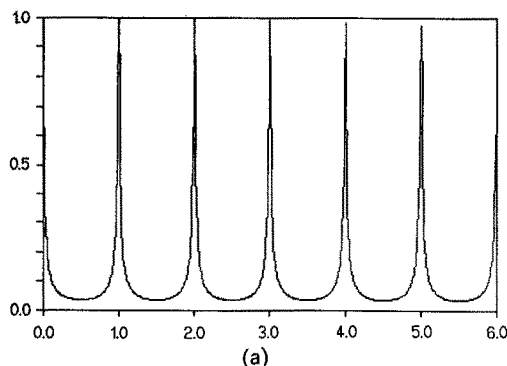


FIG. 3. Rapport d'amplitude et déphasage en fonction du rapport de la pulsation de sollicitation à la première pulsation propre: (a) rapport d'amplitude; (b) déphasage.

ce phénomène de pseudo-résonance. Les pulsations propres du système sont égales à des multiples entiers de celle de transit du fluide dans la boucle. Lorsque la sollicitation a une pulsation égale à l'une de celles-ci, elle effectue un nombre entier de cycles durant une période de transit de la boucle fluide. Une masse d'eau élémentaire passant entre les abscisses curvilignes x_1 et x_2 va donc recevoir, lors de ce passage, une énergie égale à celle reçue lors du passage précédent. Ce qui veut dire que la température de la masse recevant le maximum d'énergie à chaque passage va s'établir à une valeur maximale qui ne peut être atteinte avec des sollicitations ayant des pulsations voisines et différentes.[†]

Nous pouvons supposer qu'un mode propre d'ordre m n'est excité que par des sollicitations ayant des pulsations égales ou très voisines de la sienne. Afin de vérifier ceci, nous allons réduire le modèle modal à un seul mode, tracer les variations de A et ϕ au voisinage de la pulsation propre correspondante et comparer les courbes à celles obtenues avec un modèle d'ordre 200 (Fig. 4). Nous constatons alors que les courbes données par les deux modèles sont pratiquement confondues au voisinage de la pulsation propre du mode conservé. Ce résultat peut être démontré plus rigoureusement sur les formules analytiques. Cette démonstration nécessite un calcul long que nous ne reproduisons pas ici.

Nous en concluons que la réduction de l'ordre du modèle modal d'un système thermique à transferts

[†] Le raisonnement sur des masses élémentaires isolées ou indépendantes se justifie physiquement par le fait que le gradient de température n'a pas le temps de se réuniformiser par diffusion thermique durant le parcours de la boucle. Le terme de transport est en réalité très grand par rapport au terme de conduction ($\rho c v \gg k$).

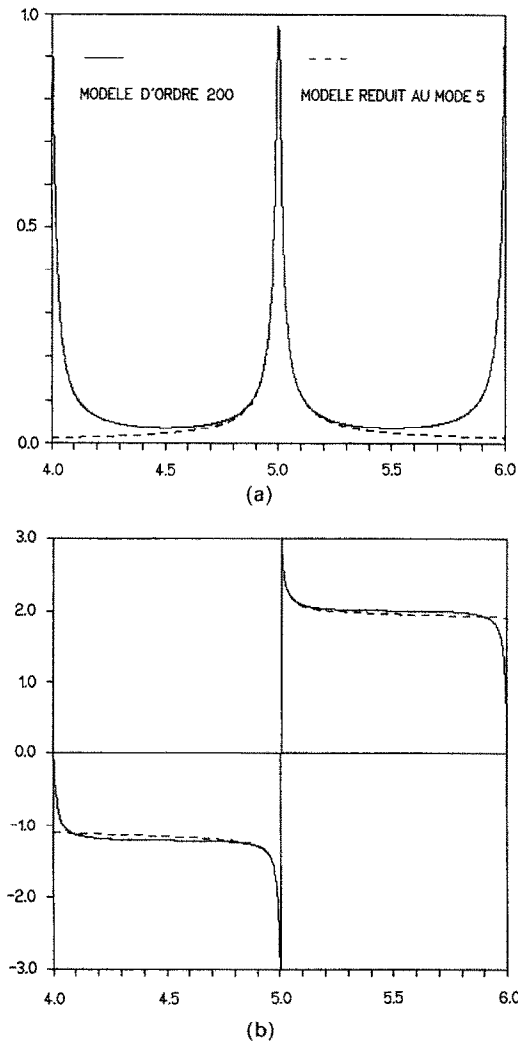


FIG. 4. Comparaison du modèle réduit au mode 5 au modèle d'ordre 200 (solicitation harmonique): (a) rapport d'amplitude; (b) déphasage.

non réciproques, lorsque celui-ci est sollicité par une puissance périodique, doit tenir compte de la position de la pulsation de sollicitation par rapport aux pulsations propres du système. Contrairement donc au cas des sollicitations en échelon, un mode propre d'ordre élevé peut être prépondérant par rapport aux autres, lorsque la pulsation propre correspondante est égale ou très proche de celle de la sollicitation. On peut penser que ceci est un inconvénient pour la réduction des modèles modaux lorsqu'il s'agit de sollicitations riches en harmoniques. Mais en réalité, les maxima du rapport d'amplitude en pseudo-résonance ne sont pas les mêmes pour tous les modes propres et ont tendance à décroître lorsqu'ils sont associés à des pulsations propres élevées.

Afin de pouvoir évaluer l'importance d'une pseudo-résonance, il suffit de tracer le spectre de raies modales correspondant aux valeurs des rapports d'amplitude $A(\omega_m)$. En ce qui concerne le présent exemple, nous obtenons le schéma de la Fig. 5.

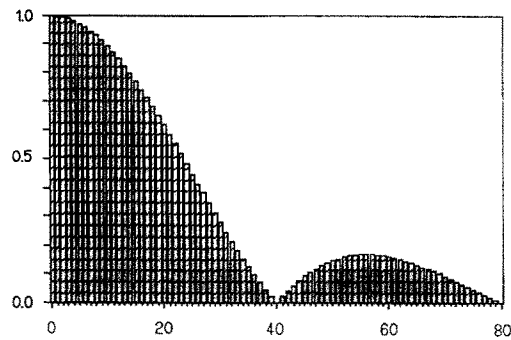


FIG. 5. Amplitudes des pseudo-résonances. Mode 0 au mode 80.

Terminons cette analyse en l'illustrant par deux courbes d'évolutions de la température du fluide au point x_0 , lorsque la boucle est sollicitée par une puissance sinusoïdale (Fig. 6). Dans le premier cas (Fig. 6(a)), la pulsation de sollicitation est égale à celle du mode propre 1 (pseudo-résonance). Dans le deuxième (Fig. 6(b)), elle s'en écarte de 10 pourcent; on observe alors des battements périodiques en régime transitoire.

Signalons que les courbes reproduites ici ont été obtenues suite à des simulations avec un modèle modal réduit au seul mode 1. Nous avons simulé ces mêmes évolutions avec un modèle d'ordre 200, mais nous n'avons pas tracé les courbes correspondantes

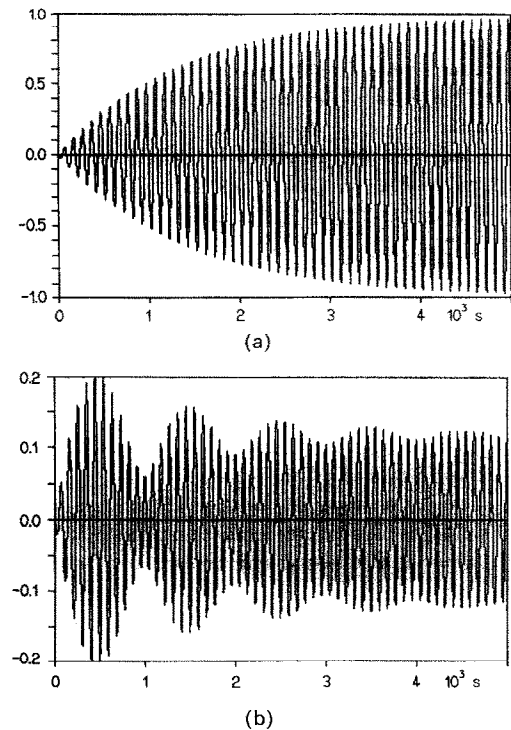


FIG. 6. Evolution de θ de 0 à 5000 s (solicitation sinusoïdale): (a) $\Omega_0 = \omega_1$; (b) $\Omega_0 = 1.1 \omega_1$.

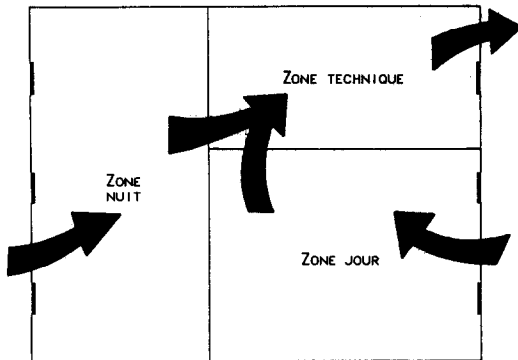


FIG. 7. Plan du bâtiment modélisé.

car elles se confondent pratiquement avec celles présentées sur la Fig. 6.

Sur cet exemple, nous venons de montrer que la forme même de la solution modale explique le comportement "pseudo-résonant" de la boucle fluide. Il y a une interaction nette entre les caractéristiques fréquentielles de la sollicitation et les pulsations propres du système. Cette constatation nous a permis de guider la réduction du modèle.

4.2. Thermique du bâtiment

Un bâtiment est une structure thermique complexe où sont couplés des éléments divers (murs multicouches, parois, vitrages, ambiances, etc.). Et la diversité des sollicitations (conditions météorologiques, puissances de chauffage, apports internes, etc.) complique encore l'étude de son comportement. Dans ce cas seules les méthodes numériques sont praticables, et on se trouve confronté au problème de temps de calcul requis pour avoir des résultats significatifs.

La méthode modale offre à nouveau de grandes possibilités de simplification grâce notamment aux techniques de réduction qu'elle permet de mettre en oeuvre [34, 35]. Mais les restrictions imposées par la condition de réciprocity des échanges empêchaient jusqu'ici la prise en compte des débits d'air non symétriques entre les différentes zones (ventilations mécaniques contrôlées). Ceci ne formait qu'un inconvénient mineur puisque les débits en question sont généralement faibles et n'influent pas énormément sur le comportement thermique de l'ensemble de la structure.

Notre étude permet néanmoins, en levant cette restriction, d'avoir plus de réalisme et de précision dans le modèle de comportement thermique du bâtiment.

Dans cet exemple, nous considérons un bâtiment comprenant trois zones. L'enveloppe est décomposée en sept parois verticales, un plancher, un plafond et six ouvertures vitrées. Les zones sont séparées l'une de l'autre par des cloisons intérieures (Fig. 7). Une ventilation mécanique contrôlée assure le renouvellement d'air dans les zones de jour et de nuit, avec un taux à peu près égal à un volume par heure. L'évacuation de l'air vicié se fait par la zone technique.

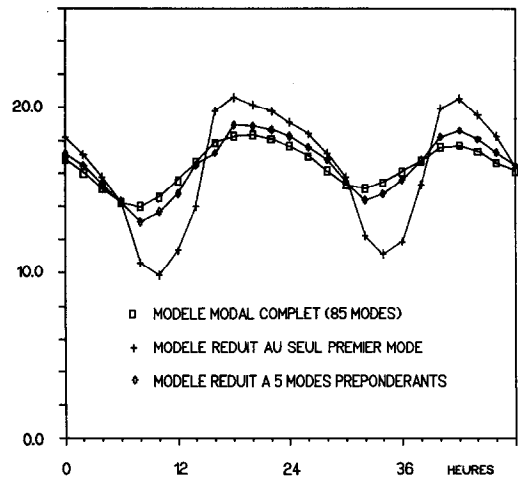


FIG. 8. Evolution de la température d'air dans la zone technique.

La discrétisation de l'opérateur de la chaleur et des conditions de couplage est obtenue par différences finies sur un maillage des différents composants. Nous obtenons un modèle comprenant au total 85 équations. Les courbes de la Fig. 8 représentent l'évolution de la température d'air dans la zone technique simulée avec trois modèles modaux différents.

La courbe obtenue avec le modèle modal complet (85 modes) se confond pratiquement avec celle donnée par une résolution classique aux différences finies. En comparant cette évolution à celle simulée à l'aide du modèle modal réduit au premier mode, on voit que ce dernier ne suffit pas à lui tout seul pour reconstituer la température observée. De l'analyse des tableaux de réponses indicelles il est possible d'extraire les modes dominants les évolutions des différents couples (variable observée, sollicitation appliquée). Si on ne garde que les modes dont la contribution au régime permanent est supérieure à 5%, on obtient pour cet exemple un modèle d'ordre 5. La courbe qui lui est associée montre qu'en choisissant judicieusement les modes à conserver, on arrive à réduire considérablement le modèle de comportement thermique d'un bâtiment complet, sans trop perdre en précision.

5. CONCLUSION ET DEVELOPPEMENTS FUTURS

Les résultats que nous venons d'énoncer confirment l'intérêt de la méthode modale. Elle fournit un cadre théorique général et rigoureux à l'étude des systèmes linéaires et stationnaires. La représentation analytique formelle du comportement du système qui en est issu est riche d'enseignements.

Ainsi nous avons montré comment la mise en lumière des fréquences propres aide à comprendre un phénomène complexe comme la pseudo-résonance. Les contributions dominantes de quelques modes propres aux réponses du système permettent d'en con-

denser la représentation mathématique. De là il est possible de construire des algorithmes de simulation rapides. On peut envisager d'identifier les paramètres du modèle réduit, à l'image de ce qui est fait pour les structures "réciproques". Le résultat sera utilisable dans des commandes de processus où sont utilisées des boucles de fluide, ce qui couvre un large champ d'applications.

Remerciement—Les auteurs remercient l'Agence Française pour la Maîtrise de l'Energie (AFME) qui a participé au financement de cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. N. Sneddon, *The Use of Integral Transform*. McGraw-Hill, New York (1972).
2. A. V. Luikov, *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, New York (1968).
3. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, London (1959).
4. G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Method*, 2nd Edn. Clarendon Press, Oxford (1985).
5. G. Dhett et G. Touzot, *Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis*. Editions Maloine, Paris (1981).
6. P. Bacot, A. Neveu et J. Sicard, Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment, *Rev. Gén. Thermique* No. 267, 189–201 (1984).
7. J. Sicard, P. Bacot et A. Neveu, Analyse modale des échanges thermiques dans le bâtiment, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 111–123 (1985).
8. C. Carter, Predicting passive solar performance using modal expansions, *Proc. 3rd U.S. Natl Passive Solar Conf.*, San Jose, pp. 309–313 (1979).
9. G. Lefebvre, J. Bransier et A. Neveu, Simulation du comportement thermique d'un local par des modèles numériques d'ordre réduit, *Rev. Gén. Thermique* No. 302, 106–114 (1987).
10. A. Neveu et J. Sicard, Analyse de l'inertie thermique par la méthode modale, *Journée SFT, Paris* (1984).
11. J. J. Salgon and A. Neveu, Application of modal analysis to modelling of thermal bridges in buildings, *Energy Buildings* No. 10, 109–120 (1987).
12. P. Bacot, Identification de modèles de comportement des systèmes thermiques, *Rev. Gén. Thermique* No. 277, 15–21 (1985).
13. R. Pasqueti, D. Petit et T. B. Jaffar, Réduction et identification des processus de diffusion thermique par analyse modale, *Congrès SFT, Marseille* (1986).
14. M. D. Mikhailov, M. N. Özisik and N. L. Vulchanov, Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 1131–1141 (1983).
15. M. N. Özisik, *Heat Conduction*, p. 74. Wiley, New York (1980).
16. R. M. Cotta, M. D. Mikhailov and M. N. Özisik, Transient conjugated forced convection in ducts with periodically varying inlet temperature, *Int. J. Heat Mass Transfer* **30**, 2073–2082 (1987).
17. L. Onsager, *Phys. Rev.* No. 37, 405 et No. 38, 2265 (1931).
18. L. Schwartz, *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*. Herman, Paris (1983).
19. R. Siegel and J. R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 2nd Edn. Hemisphere, New York (1981).
20. A. Fortier, *Mécanique des Fluides et Transferts de Chaleur et de Masse par Convection*. Masson, Paris (1975).
21. P. Hess, On the relative completeness of the generalized eigenvectors of elliptic eigenvalue problems with indefinite weight function, *Math. Ann.* **270**, 467–475 (1985).
22. V. A. Il'in, On the absolute convergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of a non-selfadjoint elliptic operator, *Sov. Math. Dokl.* **29**, 10–13 (1984).
23. N. M. Krukovskii, The m -tuple completeness of systems of generalized eigenfunctions and associated functions in W_2^1 of boundary-value problems for elliptic equations and systems, *Differentsial'nye Uravneniya* **12**(10), 1832–1841, October (1976).
24. C. L. Dolph, Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, *Bull. Am. Math. Soc.* **67**, 1 (1961).
25. M. A. Naimark, *Linear Differential Operators. Part 1: Elementary Theory*. Frederick Ungar, New York (1967).
26. P. R. Halmos and V. S. Sunder, *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*. Springer, Berlin (1978).
27. J. Sicard, Analyse modale appliquée à la thermique : fondements analytiques, applications au bâtiment, Thèse de Docteur Ingénieur, Paris 6 (1984).
28. M. Bouzidi and P. Duhamel, An algorithm for solving the eigenvalue problems associated with heat diffusion in composite slabs, Fifth Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems, Montréal, July (1987).
29. J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford University Press, London (1965).
30. J. P. Nougier, *Méthodes de Calcul Numérique*. Masson, Paris (1987).
31. I. N. Sneddon, *Partial Differential Equations*. McGraw-Hill, New York (1957).
32. A. Neveu, K. El Khoury, G. Lefebvre et J. J. Salgon, Rapport final thermique des enveloppes, Convention AFME/ARMINES (1986).
33. P. Bacot, Analyse modale des systèmes thermiques, Thèse de Docteur Ingénieur, Paris 6 (1984).
34. G. Lefebvre, Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment, Thèse de Doctorat, Paris 6 (1987).
35. C. Carter, Heat conduction through the trombe wall, ASME Paper No. 80-HT-22 (1980).
36. E. M. Sparrow, On the calculation of radiant interchange between surfaces. In *Modern Developments in Heat Transfer* (Edited by W. Ibele), pp. 181–212. Academic Press, New York (1963).

ANNEXE A. CALCUL DES ECHANGES RADIATIFS

Considérons une enceinte \mathcal{S} formée de N surfaces (S_i , $i = 1, N$) isothermes, grises et diffusantes en émission et en réflexion.

Le flux net gagné par une surface S_i s'écrit :

$$\phi_i = S_i \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_{ij} (\sigma T_j^4 - \sigma T_i^4)$$

\mathcal{F}_{ij} étant le facteur de transfert radiatif de la surface S_i à la surface S_j [36].

Lorsque les températures des surfaces varient autour d'une valeur T_0 sans trop s'en écarter, le flux ϕ_i peut être approximé par une expression linéaire de la forme :

$$\phi_i = S_i \sum_{j=1}^N \mathcal{F}'_{ij} (T_j - T_i)$$

avec

$$\mathcal{F}'_{ij} = 4\sigma T_0^3 \mathcal{F}_{ij}$$

que l'on peut aussi transformer en :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N R_{ij} T_j$$

où

$$R_{ij} = S_i \mathcal{F}'_{ij} \quad \text{pour } i \neq j$$

et

$$R_{ij} = S_i(\mathcal{F}'_{ji} - \sum_{j=1}^N \mathcal{F}'_{ij}).$$

La relation de réciprocité des facteurs de transfert permet alors d'écrire :

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Le flux net gagné par un élément dM de S_i est :

$$d\phi(M) = \frac{dM}{S_i} \sum_{j=1}^N R_{ij} T_j$$

qu'on peut écrire plus généralement par :

$$d\phi(M) = dM \sum_{i=1}^N \frac{\delta S_i(M)}{S_i} \sum_{j=1}^N R_{ij} T_j$$

où δS_i est une distribution telle que :

$$\delta S_i(M) = \begin{cases} 1 & \text{si } M \in S_i \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

De la même façon, la température T_j peut être exprimée en fonction des températures ponctuelles par :

$$T_j = \int_{\mathcal{S}} \frac{\delta S_j(M')}{S_j} T(M') dM'.$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} d\phi(M) &= dM \int_{\mathcal{S}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\delta S_i(M)}{S_i} \frac{\delta S_j(M')}{S_j} R_{ij} \right) T(M') dM' \\ &= dM \int_{\mathcal{S}} r(M, M') T(M') dM'. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que :

$$r(M, M') = r(M', M).$$

ANNEXE B. EXPRESSION DE L'OPERATEUR ADJOINT DE LA CHALEUR

L'opérateur de la chaleur est défini par :

$M \in \mathcal{D}^0 :$

$$L(\mathcal{f}(M)) = \nabla(K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) + \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \mathcal{f}(M') dM' - \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\mathcal{f}(M) \quad (\text{B1})$$

avec les conditions aux limites homogènes :

$M \in \mathcal{S}^0 :$

$$[K_j(M)\nabla\mathcal{f}_j(M) - K_i(M)\nabla\mathcal{f}_i(M)] \cdot \mathbf{n}_y(M) + \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \mathcal{f}(M') dM' = 0 \quad (\text{B2})$$

$M \in \mathcal{S}^* :$

$$-K(M)\nabla\mathcal{f}(M) \cdot \mathbf{n}(M) + \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \mathcal{f}(M') dM' = 0. \quad (\text{B3})$$

Calculons le produit scalaire :

$$\langle L(\mathcal{f}), \mathcal{g} \rangle = \int_{\mathcal{D}^0} L(\mathcal{f}(M)) \bar{\mathcal{g}}(M) dM$$

où $\mathcal{f}(M)$ et $\mathcal{g}(M)$ vérifient les conditions aux limites associées à l'opérateur de la chaleur L .

Ce produit scalaire est égal à la somme de trois termes :

$$\langle L(\mathcal{f}), \mathcal{g} \rangle = \int_{\mathcal{D}^0} \bar{\mathcal{g}}(M) \nabla(K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{\mathcal{D}^0} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \bar{\mathcal{g}}(M) \mathcal{f}(M') dM' dM \\ &- \int_{\mathcal{D}^0} \bar{\mathcal{g}}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\mathcal{f}(M) dM. \end{aligned}$$

Développons :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}^0} \bar{\mathcal{g}}(M) \nabla(K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM \\ &= \int_{\mathcal{D}^0} \nabla(\bar{\mathcal{g}}(M)K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}^0} \nabla\bar{\mathcal{g}}(M) \cdot (K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM. \end{aligned}$$

En décomposant le premier terme à droite en une somme d'intégrales sur les différents sous-domaines, et en appliquant pour chacune de ces intégrales le théorème d'Ostrogradsky, on trouve, d'après les conditions aux limites (B2) et (B3) :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D}^0} \nabla(\bar{\mathcal{g}}(M)K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \bar{\mathcal{g}}(M) \mathcal{f}(M') dM' dM. \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} &- \int_{\mathcal{D}^0} \bar{\mathcal{g}}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\mathcal{f}(M) dM \\ &= - \int_{\mathcal{D}^0} \nabla(\bar{\mathcal{g}}(M) \mathcal{f}(M) \mathbf{u}(M)) dM \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}^0} \mathcal{f}(M) \bar{\mathcal{g}}(M) \nabla \cdot \mathbf{u}(M) dM \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}^0} \mathcal{f}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\bar{\mathcal{g}}(M) dM. \end{aligned}$$

Or, d'après l'équation de conservation de la masse dans le fluide :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(M) = 0.$$

D'autre part, le premier terme à droite de l'égalité se transforme en une somme d'intégrales surfaciques, d'après le théorème d'Ostrogradsky. Mais on sait que le champ de vitesse est nul sur les interfaces solide-fluide, alors que sur les interfaces fluide-fluide (au cas où il y aurait deux fluides non miscibles), il est tangentiel, ce qui annule son produit scalaire avec la normale. D'où :

$$\begin{aligned} &- \int_{\mathcal{D}^0} \bar{\mathcal{g}}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\mathcal{f}(M) dM \\ &= \int_{\mathcal{D}^0} \mathcal{f}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\bar{\mathcal{g}}(M) dM. \end{aligned}$$

Ce qui donne, finalement, en rajoutant le terme correspondant au rayonnement :

$$\begin{aligned} \langle L(\mathcal{f}), \mathcal{g} \rangle &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \bar{\mathcal{g}}(M) \mathcal{f}(M') dM' dM \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}^0} \nabla\bar{\mathcal{g}}(M) \cdot (K(M)\nabla\mathcal{f}(M)) dM \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}^0} \mathcal{f}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla\bar{\mathcal{g}}(M) dM. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'opérateur L^* ayant la même expression que L , sauf pour $\mathbf{u}(M)$ qui est remplacé par

$-u(M)$, et associé aux mêmes conditions aux limites. Calculons le produit scalaire :

$$\langle f, L^*(g) \rangle = \int_{\mathcal{D}^0} f(M) \overline{L^*(g(M))} dM.$$

Comme l'opérateur de la chaleur est à coefficients réels, la fonction $\bar{g}(M)$ vérifie les conditions aux limites (B2) et (B3) et l'on a :

$$\overline{L^*(g(M))} = L^*(\bar{g}(M)).$$

On peut alors suivre la même démarche pour le terme de conduction, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}^0} f(M) \nabla(K(M) \nabla \bar{g}(M)) dM \\ &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') f(M) \bar{g}(M') dM' \\ & \quad - \int_{\mathcal{D}^0} \nabla f(M) \cdot (K(M) \nabla \bar{g}(M)) dM. \end{aligned}$$

En rajoutant directement les termes correspondant au transport et au rayonnement, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle f, L^*(g) \rangle &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') f(M) \bar{g}(M') dM' dM \\ & \quad - \int_{\mathcal{D}^0} \nabla f(M) \cdot (K(M) \nabla \bar{g}(M)) dM \\ & \quad + \int_{\mathcal{D}^0} \bar{g}(M) \mathbf{u}(M) \cdot \nabla f(M) dM. \end{aligned}$$

Or, en permutant l'ordre d'intégration et les rôles de M et M' , et en remarquant que $r(M, M') = r(M', M)$, on obtient que :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') f(M) \bar{g}(M') dM' dM \\ &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} r(M, M') \bar{g}(M) f(M') dM' dM. \end{aligned}$$

D'autre part, le tenseur $K(M)$ étant symétrique, on peut démontrer que :

$$\nabla f(M) \cdot (K(M) \nabla \bar{g}(M)) dM = \nabla \bar{g}(M) \cdot (K(M) \nabla f(M)) dM.$$

On vérifie ainsi l'égalité des produits scalaires :

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, L^*(g) \rangle$$

ce qui montre que l'opérateur L^* est bien l'adjoint de L .

MODAL ANALYSIS OF THERMAL SYSTEMS IN THE PRESENCE OF NON-RECIPROCAL TRANSFERS

Abstract—The field of application of modal analysis to thermal structures is limited by three hypotheses concerning the nature of transfers: linearity, stationarity and reciprocity. The latter practically forbids the use of the method when there are fluids in motion. We describe here a formal resolution process that eliminates this restriction for a very general heat operator (including thermal diffusion, radiation and energy transport by mass transfer). The method relies on the adaptation of the separation of variables technique to the domain of complex numbers. The calculations show the existence of two bi-orthogonal families of eigenfunctions associated with discrete spectra of eigenvalues and forming a basis of elementary solutions. Two examples, a fluid circulation loop and a building with controlled mechanical ventilation, illustrate the use of the resulting general modal model.

MODALANALYSE VON THERMISCHEN SYTHEMEN BEI NICHT REZIPROKER WÄRMEÜBERTRAGUNG

Zusammenfassung—Das Anwendungsgebiet der Modalanalyse einer thermischen Struktur ist beschränkt durch drei grosse Hypothesen, die die Natur der Wärmeübertragung betreffen: Linearität, stationäre und reziproke Relationen. Die Hypothese der reziproken Relation untersagt in der Praxis den Gebrauch der Methode, wenn es sich um strömende Fluide handelt. Wir beschreiben hier eine formelle Lösungsmethode, die für einen ganz allgemeinen Wärmeoperator (Thermischer Diffusion, Strahlung, Energieübertragung durch Massentransport) diese Einschränkung aufhebt. Die Berechnung basiert auf die Anpassung der Separation von Variablen im komplexen Zahlenbereich. Der Vorgang zeigt klar zwei biorthogonale Gruppen von Eigenmoden, angelehnt an zählbare Spektren der Eigenwerte, geben sie eine Basis der elementaren Lösungen. Zwei Beispiele, ein Umlauf eines Fluides und ein Gebäude, ausgestattet mit einer regelbaren, mechanischen Lüftung, zeigen die Anwendung des allgemeinen Modalmodell, wie es hier entworfen wurde.